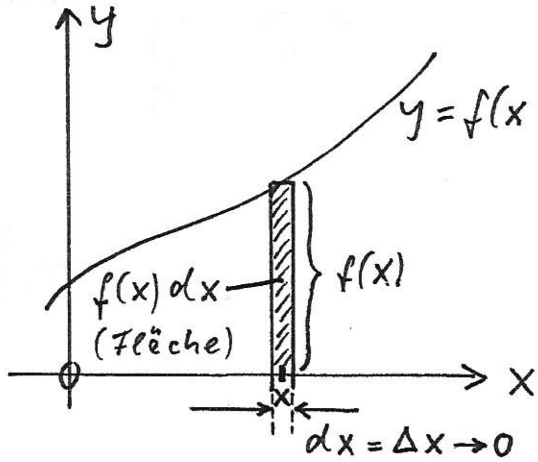
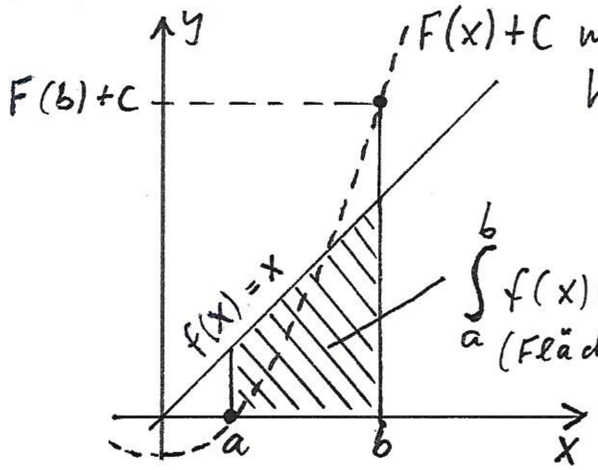
Wesentlich wichtiger als unbestimmte sind in Naturwissenschaft und Technik die **bestimmten Integrale**, wobei – wie unten gezeigt wird – unbestimmte Integrale die Vorstufe der bestimmten sind.

Man kann unschwer zeigen, dass sich das Integrieren zugleich als Berechnung der Fläche unter dem Integranden bzw. dem Funktionsgraphen von f(x) deuten lässt, denn das Differential stellt geometrisch einen „beliebig“ schmalen Streifen unter dem Graphen des Integranden dar (s. rechts). Die Stammfunktion F(x) + C ist dann graphisch einfach die Größe eines Flächeninhaltes. Gibt man noch an, zwischen welchen x-Werten man die Fläche berechnet, wodurch auch das C wegfällt, so entsteht das **bestimmte Integral**. Die x-Werte (**Integrationsgrenzen**) heißen **Unter-** bzw. **Obergrenze** des Integrals. Die nächste Skizze veranschaulicht die Zusammenhänge – wieder mittels obiger einfacher Funktion:





$F(x) + C$ mit $C = -F(a)$

hier: $\frac{1}{2}x^2 + C$ mit $C = -\frac{1}{2}a^2$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$ („Flächenfunktion“)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

(Fläche)

Man kann sich das bestimmte Integral also als die Differenz zweier unbestimmter Integrale mit allerdings jeweils festgelegtem x als Obergrenzen a und b und gleicher, aber nicht festgelegter Untergrenze (ausgedrückt durch die Unbestimmtheit von C) vorstellen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int_\xi^b f(x)\,dx - \int_\xi^a f(x)\,dx \right) = F(b) + C - (F(a) + C) =$$
$$= F(b) - F(a).$$

Dieser Sachverhalt wird **„Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“** genannt.

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals – geometrisch als Fläche unter dem Graphen des Integranden von x = a bis x = b zu deuten – ist die Differenz der Werte der Stammfunktion ohne die Integrationskonstante zu bilden. Dabei sind folgende zwei plausible Regeln zu beachten:

- Flächen unter der Abzisse (x-Achse) treten negativ auf.
- Bei Vertauschung der Integrationsgrenzen kehrt sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals um.

Rechenbeispiel:

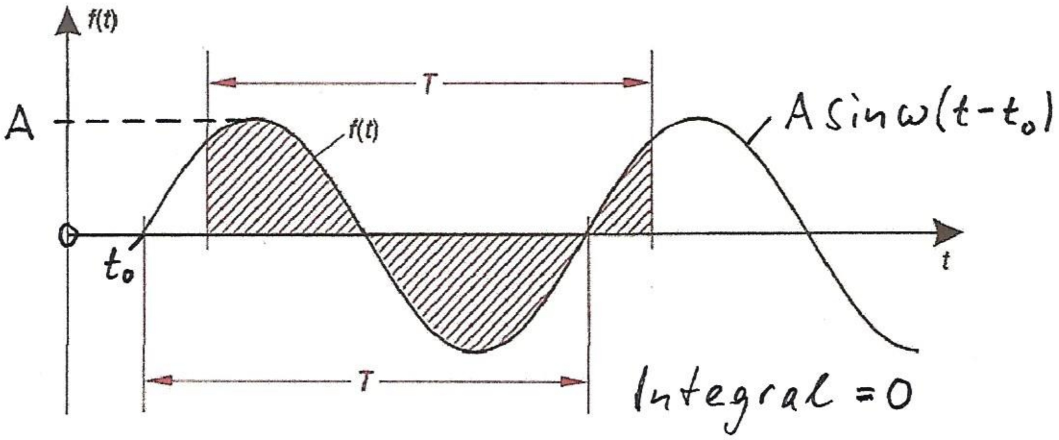
$$\int_1^2 3e^{-2x}dx = 3\int_1^2 e^{-2x}dx = 3\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}\left[e^{-2x}\right]_2^1 = \frac{3}{2}\left(e^{-2}-e^{-4}\right) = 0{,}1755\ldots$$

Beispiel aus der Theorie der Fourier-Reihen:

(Man gewöhne sich daran, dass je nach physikalischem Sachverhalt die üblichen Symbole x und y durch andere zu ersetzen sind, wobei die mathematischen Regeln natürlich unverändert gelten.)

Es liege die zu integrierende Funktion $f(t) = A\sin(\omega t - \varphi) = A\sin(\omega t - \omega t_0) = A\sin\omega(t - t_0)$ vor. (ω ist die Kreisfrequenz Winkel durch Zeit; somit ist ωt der während der Zeit t durchlaufene Winkel). Es sei das bestimmte Integral über eine Periodendauer T mit $\omega T = 2\pi$ zu bestimmen, wobei die Lage des Intervalls bzw. die Größe von t_0 beliebig ist. Aus der folgenden Abbildung erkennt man sofort, dass das Integral den Wert Null hat, denn positive und (formal) negative Flächenanteile heben sich genau auf:



Essentiell für das Verständnis der Fouriertransformation sind Integrale, in denen mindestens eine Grenze im Unendlichen liegt:

$$\int_a^\infty \ldots \;,\quad \int_{-\infty}^{b} \ldots \;,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots$$

(Zusammen mit Integralen, deren Integrand an mindestens einer (endlichen) Grenze gegen unendlich geht, heißen solche Intergrale „**uneigentlich**".)

Sinnvoll sind solche Integrale nur, wenn sie nicht selbst unendlich (unbeschränkt), d.h. „konvergent" sind.

Beispiele:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^\infty = \underbrace{\ln\infty - \ln 1 = \ln\infty}_{\text{Korrekter: } \lim\limits_{b\to\infty}(\ln b)} - 0 = \infty$$

(ln: Logarithmus zur Basis e, natürlicher Logarithmus)

Zweites Beispiel:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^\infty = \frac{1}{k}\left[e^{-kx}\right]_\infty^0$$

$$= \frac{1}{k}\left(e^0 - e^{-\infty}\right) = \frac{1}{k}(1-0) = \frac{1}{k}.$$

Obwohl beide Integranden (1/x bzw. e^{-kx}) mit zunehmendem x streng monoton (ständig nur) fallen, verhalten sich ihre Integrale völlig unterschiedlich. (Hätte man im ersten Beispiel als Untergrenze 0 statt 1 angegeben, wäre das zusätzliche Problem der Unendlichkeit an der Untergrenze aufgetaucht.)

Ein weiteres wichtiges Problem ist die Frage, in welchen Fällen eine Funktion überhaupt integrierbar ist. Die Mathematik sagt dazu, dass eine Voraussetzung dafür die Stetigkeit des Integranden ist (s. Mathematikbücher).

Weiterhin gibt es Integranden, für die keine Stammfunktion existiert. Umgekehrt formuliert: Es gibt keine Funktion, deren Ableitung den Integranden ergibt. Das wichtigste Beispiel sind Funktionen bzw. Integrale vom Grundtyp

$$e^{-x^2} \qquad \int e^{-x^2}\,dx = \,?\;\left(\text{nicht bekannt / existent}\right)$$

Solche Integrale können nur als bestimmte Integrale und numerisch (nicht-analytisch) gelöst werden, indem man die „Streifensummierung“ explizit Stück für Stück vornimmt.

Zum Schluss:

Der Kern der Integralrechnung ist das analytische Aufsuchen der Stammfunktionen. Das ist eine Mischung aus Regelanwendungen und Kunst bzw. Kreativität. Da hilft nur Üben-Üben-Üben.)

Ende des Vorkurses